

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория групп
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: И.Ю. Ждановский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

Первая тема курса — вводная. Здесь вводятся понятия смежных классов по подгруппе прежде всего для доказательства теоремы Лагранжа и ее следствий. В частности, доказывается малая теорема Ферма и теорема Эйлера.

Вторая тема посвящена изучению гомоморфизмов групп и нормальных подгрупп. Основным результатом — теорема о гомоморфизмах, из которой выводятся теоремы об изоморфизмах (или теорема о соответствии, описывающая подгруппы факторгруппы).

Следующая, третья тема — «Действия групп на множестве». Рассмотрены разные определения действия и доказана их эквивалентность. Рассмотрены такие классические действия, как действие группы на себе левыми (правыми) сдвигами, действие сопряжениями. Один из важнейших примеров действий группы в линейном пространстве — это ее представление. Доказана формула орбит и лемма Бернсайда о среднем количестве неподвижных точек действия. Среди приложений этой темы — формула классов и некоторые результаты о p -группах.

Четвертая тема посвящена структурной теории групп. Изучены такие конструкции, как прямое и полупрямое произведения подгрупп. Здесь вводится понятие коммутанта (или производной подгруппы) и связанные с ним классы разрешимых и нильпотентных групп. Приводится критерий разрешимости. Доказывается нетривиальность центра у p -групп.

В следующей, пятой теме, рассматриваются свободные группы и их факторгруппы. Вводится задание группы образующими и определяющими соотношениями. Приведены примеры таких заданий для некоторых известных конечных групп.

Очень важной для понимания теории групп в целом является тема «Теоремы Силова». Эти теоремы — основной инструмент для исследования структуры конечных групп, применяемый для решения многих задач. Показана вложимость p -подгруппы в силовскую.

Наконец, седьмая тема посвящена классификации конечнопорожденных абелевых групп.

Отметим, что идеи и методы теории групп находят применение не только внутри математики. Многие современные разделы физики (например, физика элементарных частиц и квантовая механика) базируются на теории групп.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

ознакомление слушателей с основными понятиями и методами теории групп, формирование у них доказательного и логического мышления, подготовка к изучению других математических курсов — теория колец и полей, теория Галуа и др.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории групп;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов теории групп в топологии, комбинаторике и других разделах математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки

УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
--	--

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определения группы, гомоморфизма групп, действия группы на множестве, разрешимой и простой группы, p -группы, а также связанные с ними основные понятия;
- основные конструкции теории групп и их свойства: смежные классы по подгруппе, основные примеры действия группы на множестве, прямое произведение групп, группа автоморфизмов данной группы, коммутант и центр группы, свободные группы, задание группы образующими и соотношениями;
- основные теоретические факты, относящиеся к вышеперечисленным понятиям: теорема Лагранжа, теоремы о гомоморфизмах, формула орбит и лемма Бернсайда, теоремы Силова, теорема о строении конечнопорождённых абелевых групп.

уметь:

- выявлять теоретико-групповую сущность поставленной математической задачи;
- применять основные методы теории групп к решению прикладных задач в разных областях математики;
- производить теоретико-групповые вычисления, находить центр, коммутант группы и её силовские подгруппы, использовать лемму Бернсайда для нахождения числа орбит действия;
- проводить теоретические рассуждения с использованием основных понятий теории групп.

владеть:

- Логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений.
- Методами применения теоретического материала, связанного с основными понятиями теории групп, к решению практических задач с теоретико-групповой подоплёкой.
- Методами применения основных примеров действия группы на множестве, классификации конечно порождённых абелевых групп.
- Методами исследования группы на разрешимость, включающими использование аппарата силовских подгрупп;
- Умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Подгруппы и связанные понятия	4	4		4
2	Гомоморфизмы и нормальные подгруппы	4	5		9
3	Действие группы на множестве	5	5		9
4	Прямое произведение групп, центр, коммутант, разрешимые группы	5	4		4
5	Свободные группы, образующие и соотношения	4	4		5
6	Теоремы Силова	3	5		7
7	Классификация конечнопорождённых абелевых групп	5	3		7

Итого часов	30	30		45
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Подгруппы и связанные понятия

Понятие группы. Примеры групп. Циклические группы и их подгруппы. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа: порядок элемента и подгруппы, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.

2. Гомоморфизмы и нормальные подгруппы

Гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Нормальные подгруппы, факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах.

3. Действие группы на множестве

Действие группы на множестве, его свойства. Точность действия. Орбиты действия. Стационарные подгруппы (стабилизаторы). Формула орбит. Примеры действия группы на множестве. Теорема Кэли о подгруппах симметрической группы. Центризатор элемента, нормализатор подгруппы.

Лемма Бернсайда о среднем количестве неподвижных элементов.

Группа автоморфизмов, нормальность подгруппы внутренних автоморфизмов.

4. Прямое произведение групп, центр, коммутант, разрешимые группы

Прямое произведение групп. Критерий разложимости группы в прямое произведение.

Центр группы, его свойства. Нециклическая факторгруппа по центру. Центр p -группы.

5. Свободные группы, образующие и соотношения

Свободная группа, её факторгруппы. Задание группы образующими и определяющими соотношениями.

Простые группы. Простота группы A_5 .

Коммутант группы. Разрешимые группы.

6. Теоремы Силова

Силовские подгруппы конечной группы. Теоремы Силова: существование силовских подгрупп, их сопряжённость, их количество. Вложимость любой p -подгруппы в силовскую. Основные применения теорем Силова.

7. Классификация конечнопорождённых абелевых групп

Конечно порождённые абелевы группы. Абелевы группы без кручения, их ранги и базисы. (Конечно порождённая) свободная абелева группа. Периодическая часть абелевой группы. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.
2. Сборник задач по алгебре [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / под ред. А. И. Кострикина .— Новое изд., испр. — М. : МЦНМО, 2009 .— 408 с.
3. Курс алгебры [Текст] : [учебник для вузов] / Э. Б. Винберг .— 2-е изд., стереотип. — М : МЦНМО, 2013 .— 592 с.

Дополнительная литература

Курош, А. Г.

Курс высшей алгебры [Текст] : учебник для вузов / А. Г. Курош .— 9-е изд. — М : Наука, 1968 .— 431 с. - Библиогр.: с. 425-426. - Предм.указ.: с. 427-431. - 100000 экз.

Каргаполов, М. И.

Основы теории групп [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков .— 4-е изд., перераб. — М. : Наука ; Физматлит, 1996 .— 288 с. - Дополн.: с. 262-279. - Библиогр.: с. 280-281. -Предм. указ.: с. 283-287. - 1000 экз.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1235/> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Теория групп».
2. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1619/> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Симметрия и группы».
3. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1252/> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Алгебра. Учебники».
4. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
5. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
6. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
7. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
8. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Maple, Mathcad, Scilab и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

Доп. литература: Богопольский О.В. Введение в теорию групп. Москва– Ижевск: ИКИ, 2002.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Математика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра высшей математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчик: И.Ю. Ждановский, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория групп» обучающийся должен:

знать:

- определения группы, гомоморфизма групп, действия группы на множестве, разрешимой и простой группы, p -группы, а также связанные с ними основные понятия;
- основные конструкции теории групп и их свойства: смежные классы по подгруппе, основные примеры действия группы на множестве, прямое произведение групп, группа автоморфизмов данной группы, коммутант и центр группы, свободные группы, задание группы образующими и соотношениями;
- основные теоретические факты, относящиеся к вышеперечисленным понятиям: теорема Лагранжа, теоремы о гомоморфизмах, формула орбит и лемма Бернсайда, теоремы Силова, теорема о строении конечнопорождённых абелевых групп.

уметь:

- выявлять теоретико-групповую сущность поставленной математической задачи;
- применять основные методы теории групп к решению прикладных задач в разных областях математики;
- производить теоретико-групповые вычисления, находить центр, коммутант группы и её силовские подгруппы, использовать лемму Бернсайда для нахождения числа орбит действия;
- проводить теоретические рассуждения с использованием основных понятий теории групп.

владеть:

- Логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений.
- Методами применения теоретического материала, связанного с основными понятиями теории групп, к решению практических задач с теоретико-групповой подоплёкой.
- Методами применения основных примеров действия группы на множестве, классификации конечно порождённых абелевых групп.
- Методами исследования группы на разрешимость, включающими использование аппарата силовских подгрупп;
- Умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Для каких групп G и элементов $g, h \in G$ отображение $\phi: G \rightarrow G$, заданное формулой $\phi(x) = gx^{-1}h$, является а) гомоморфизмом; б) автоморфизмом?
2. Дана перестановка $\sigma = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11 / 7\ 6\ 3\ 11\ 8\ 1\ 2\ 9\ 5\ 4\ 10$. Найти а) её порядок и чётность; б) её централизатор в S_{11} ; в) мощность её орбиты при действии группой A_{11} на S_{11} сопряжениями.
3. Сколько существует гомоморфизмов из $Z_4 \times Z_5$ в S_5 ?
4. Найдите количество матриц 3×3 над полем Z_p , если матрицы, отличающиеся перестановками строк и столбцов, считаются одинаковыми.
5. Пусть $G = GL_2(Z_3)$. Докажите, что а) G не изоморфна никакой подгруппе в S_5 ; б) G изоморфна некоторой подгруппе в A_{10} .

Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1

- 1) Разрешимые группы. Эквивалентность разных определений. Связь с разрешимостью подгрупп и факторгрупп.
- 2) Докажите, что любая силовская подгруппа прямого произведения двух конечных групп является произведением силовских подгрупп в сомножителях.

Билет № 2

- 1) Центр группы, его свойства. Нецикличность факторгруппы по центру. Группы порядка p^2 .
- 2) Разрешима ли свободная группа с тремя порождающими элементами?

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

Проректор по учебной работе и довузовской подготовке

_____ А. А. Воронов
« ____ » _____ 2018

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: **Теория групп**, 2 курс, 3 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

№	Вид занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 8
2.	Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания	0 – 8
3.	Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 4
4.	Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 4
5.	Проверка теоретических знаний (не более трёх лекционных контрольных)	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
	Итого за работу в семестре	0 – 30
7.	Устный ответ (экзамен)	0 – 70
	ИТОГО	0 – 100

Если сумма баллов за работу в семестре ≤ 8 , то студент считается не выполнившим обязанности по добросовестному освоению образовательной программы и выполнению учебного плана, о чем сообщается в деканат.

Соответствие между суммой баллов БРС и итоговой академической успеваемостью (итоговой оценкой)

Баллы БРС	Оценки	
93 – 100	10	Отлично
86 – 92	9	
79 – 85	8	
72 – 78	7	Хорошо
65 – 71	6	
58 – 64	5	
51 – 57	4	Удовлетворительно
44 – 50	3	
30 – 43	2	Неудовлетворительно
0 – 29	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

Г.Е. Иванов